КОНСТРУИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ БИРЖЕВЫХ ОПЦИОНОВ

М.Э. Фатьянова

Научные руководители: д.т.н., профессор А.А. Мицель, к. ф.-м. н., доцент М.Е. Семёнов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г.Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: mef1@tpu.ru

DESIGN OF COMPLEX PORTFOLIOS OF EXCHANGE OPTIONS

M.E. Fatyanova

Scientific Supervisor: Dr., Professor A.A. Mitsel, PhD, Associate Professor M.E. Semenov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: margarett13@tpu.ru

Abstract. *In the paper mathematically describes principles of the portfolio formation based on exchange options. The task of linear programming was formulated, and then this task was solved by two methods: simplex-method and Monte-Carlo method. These methods have been realized in MATLAB.*

Интерес к рынку финансовых продуктов неуклонно растет. При этом брокерские компании стремятся учитывать инвестиционные цели клиентов – получить максимальный доход при заранее определенной величине убытков. Наиболее часто брокеры создают финансовые продукты с одиночными опционными контрактами либо стандартными опционными стратегиями. Однако ввиду этого бывает сложно реализовать различные запросы инвестора. В работе описан подход конструирования сложных диверсифицированных портфелей биржевых опционов. Целью данной работы является конструирование и практическая реализация сложных портфелей биржевых опционов.Банк взаимодействует с клиентами (инвесторами), удовлетворяя их пожелания относительно различных финансовых продуктов на российском рынке. Предполагается, что он обеспечивает клиента всеми необходимыми аналитическими материалами с прогнозами интересующих цен активов. При этом инвестор стремится максимизировать будущую прибыль, допуская определенный уровень риска.

Основные определения. *Опционный продукт* (опционный портфель, ОП) – инвестиционная стратегия на основе купли/продажи опционных контрактов, сконструированная индивидуально для клиента исходя из его целей и запросов, включает следующие производные ценные бумаги. *Опцион «call» (колл)* дает право покупателю опциона купить базисный актив у продавца опциона по цене исполнения в установленные сроки или отказаться от этой покупки. Инвестор приобретает опцион «call», если ожидает повышения стоимости базового актива [1,2]. *Опцион «put»* (*пут*) предоставляет покупателю опциона право продать базисный актив по цене исполнения в установленные сроки продавцу опциона или отказаться от его продажи. Инвестор приобретает опцион «put», если ожидает падения стоимости базового актива. *Фьючерс* – производный финансовый инструмент, стандартный срочный биржевой контракт купли-продажи базового актива, при заключении которого стороны (продавец и покупатель) договариваются только об уровне цены и сроке поставки. *Страйк* – фиксированная в опционном контракте цена (цена исполнения), по которой может быть куплен или продан базовый актив в случае исполнения опциона. Цена *Ask*(*Bid*) цена продажи (покупки) базового актива. При этом *спредом* называется разность цен Ask и Bid [3].

Входные параметры и обозначения. M – рыночная цена базового актива на момент экспирации продукта (цена спот); M_{now}–цена базового актива на момент конструирования продукта; M_E – ожидаемая инвестором цена базового актива; E – количество купленных (проданных) опционов с одним страйком, определяется исходя из ликвидности на рынке, в данном исследовании E=10; $X = (X_1,X_2, \ldots,X_6)$, причем $|X_i| \le E$– вектор количества купленных (проданных) опционов колл на фьючерс; аналогично $Y = (Y_1,Y_2,\ldots, Y_6)$, причем $|Y_i| \le E$– вектор количества купленных (проданных) опционов колл на фьючерс; $S_C = (S_{C1}, S_{C2}, \ldots, S_{C6})$, где $S_{C1}< \ldots <S_{C6}$– цена страйк опционов колл на фьючерсный контракт; $S_P = (S_{P1}, S_{P2}, \ldots,S_{P6})$, $S_{P1}< \ldots <S_{P6}$– цена страйк опционов пут на фьючерсный контракт; $\max(M– S_{Ci};0)$– выплата по опциону колл в момент экспирации продукта; $\max(S_{Pj}– M; 0)$– выплата по опциону пут в момент экспирации продукта; $\Sigma_{k=1..6}(X_k\cdot\max(M– S_{Ck};0))$– суммарная общая колл-выплата в момент экспирации продукта;$\Sigma_{k=1..6}(Y_k\cdot\max(S_{Pk}– M; 0))$ – суммарная общая пут-выплата в момент экспирации продукта; $P=(P_1, \ldots,P_6)$ – средневзвешенные цены опционов колл в соответствии с ценой страйк; $Q=(Q_1,\ldots,Q_6)$ – средневзвешенные цены опционов пут в соответствии с ценой страйк; средневзвешенные цены покупки опционов: колл$P_{Bid}=(P_{Bid(1)}, P_{Bid(2)},\ldots, P_{Bid(6)})$, где $P_{Bid(k)}= 0{,}9\cdot P_k$, и пут $Q_{Bid}=(Q_{Bid(1)},Q_{Bid(2)},\ldots,Q_{Bid(6)})$, где $Q_{Bid(k)}=0{,}9\cdot Q_k$; средневзвешенные цены продажи опционов: колл $P_{Ask}=(P_{Ask(1)},P_{Ask(2)},\ldots,P_{Ask(6)})$, где $P_{Ask(k)}=1{,}1\cdot P_k$, и пут$Q_{Ask}=(Q_{Ask(1)},Q_{Ask(2)},\ldots,Q_{Ask(6)})$, где $Q_{Ask(k)}= 1{,}1\cdot Q_k$,$k$=1,2,... , 6. Тогда суммарную прибыль, получаемую в момент экспирации продукта, можно представить в следующем виде [4]:

$$F(P,Q,X,Y,M)=\Sigma_{k=1..n}(X_k\cdot(–(P_{Bid(k)}\vee P_{Ask(k)})+ \max(M – S_{Ck};0)) + Y_k(–(Q_{Bid(k)}\vee Q_{Ask(k)}) + \max(S_{Pk} – M;0))). \quad (1)$$

Принципы формирования портфеля

1. Величина выплат портфеля на промежутке $[0; \min(Sc_1;Sp_1)]$ должна быть ограничена, а также должно выполняться условие горизонтальности графика:

$$F(P,Q,X,Y,M)=\min(Sc_1;Sp_1))=-L_u u\ \Sigma_{k=1..n}Y_k=0. \quad (2)$$

2. Для обеспечения горизонтальности выплат на промежутке цены$[\max(Sc_n;Sp_n); +\infty]$, должно выполняться условие: $\Sigma_{k=1..n}X_k=0$. (3)

3. Растущий тренд графика функции на промежутке между двумя любыми соседними страйками создается из условия [4,5]: $$D_q = \sum_{Sc_i \le S_q} X_i - \sum_{Sp_j \ge S_{q+1}} Y_j \ge 0, \quad (4)$$

$$(S_q;S_{q+1}) \in [\min (Sc_1;Sp_1); \max (Sc_n;Sp_n)], \text{ где } q=1,2, \ldots ,7.$$

4. Отрицательная стоимость продукта, выражается следующим ограничением-равенством:

$$\mathrm{Mon}=\Sigma_{k=1..n}[X_k\cdot(–(P_{Bid(k)}\vee P_{Ask(k)})) + Y_k\cdot (–(Q_{Bid(k)}\vee Q_{Ask(k)})] =\mathrm{const}<0. \quad (5)$$

Постановка задачи и реализация. Пусть инвестор 22.02.16 выдвигает прогноз движения цен акций ПАО «Газпром» (GAZP) от текущего значения M_{now}=138,8руб. до ожидаемого значения на 15.06.16 M_E=155руб., в котором он желает получить максимальный доход. При этом инвестор хочет получить 1000 руб. наличными в момент приобретения продукта и ограничить максимальный убыток величиной L=10 000 руб.

Для удовлетворения предпочтений инвестора следует сформировать портфель из 6 опционов «call» (колл) на фьючерсный контракт на обыкновенные акции ПАО «Газпром» и 6 опционов «put» (пут) с одним сроком исполнения 17.06.16 и различными страйками. Введем вектор страйков опционов колл и пут: S_C = (13500, 14000, 14500, 15000, 15500, 16000) и S_P = (12000, 12500, 13000, 13500, 14000, 14500),P=(1187,894,647,448,295,184),Q=(186, 276,399, 562, 769, 1022).

Процесс формирования портфеля сводится к нахождению оптимального числа опционных контрактов колл и пут (X_{opt}, Y_{opt}), путем решения задачи линейной оптимизации (линейного программирования, ЗЛП), состоящей из 12 переменных (по 6 опционов колл и пут с различными страйками) при заданном ряде ограничений в виде неравенств и равенств. В результате решения задачи находится вектор оптимальных долей опционов колл и пут:(X_{opt}, Y_{opt})=($X_{opt(1)}, \ldots, X_{opt(n)}, Y_{opt(1)}, \ldots, Y_{opt(n)}$).

Таким образом, полученное оптимальное количество опционов (X_{opt}, Y_{opt}) необходимо купить (продать) при формировании продукта для достижения максимального значения функции прибыли $F_{opt}(P,Q,X_{opt}, Y_{opt},M)$ в момент экспирации.

В данном исследовании ЗЛПбыла решена симплекс-методом и методом Монте-Карло. Идея симплекс-метода состоит в монотонном изменении величины целевой функции при переходе к следующему плану. Функция $F(P,Q,X,Y,M)$ содержит 6 значений X_i и Y_i, т.е. всего 12 значений, ввиду того, что у нас имеется вариация bid или ask, в общем комплексе получается 4096 комбинаций. Таким образом, путем создания цикла из 4096 итераций и использования формул (1-5) были получены результаты: оптимальное значение целевой функции: max$F(P, Q, X_{opt}, Y_{opt}, M_E$=15500)=8795,2 руб.;оптимальныйплан: X_{opt}=(–0,67; –1,2; 10; 1,87; –10; 0) иY_{opt}=(0; 0,67; 10; –10; 9,33; –10).

Основной недостаток симплекс-метод – оптимальный план является нецелочисленным и приходится прибегать к округлению. Для устраненияуказанного недостаткаиспользован метод – Монте-Карло, который позволяет получить целочисленный оптимальный план. Основная идея решения ЗЛП методом Монте-Карло состоит генерации случайных чисел (X, Y)~U(0, 1), которые каждый раз необходимо проверять на выполнение всех ограничений ЗЛП, а также рассчитывать максимум целевой функции. Точность решения зависит напрямую от количества сгенерированных значений (X, Y).

В исследовании было проведено 409 600 000 итераций, т.е. в каждой из 4096 комбинаций было проведено 10^5 генераций значений (X, Y). В результате были получены:

оптимальное значение целевой функции: max$F(P,Q,X_{opt},Y_{opt},M_E$=15500)=14346 руб. и

оптимальный план: X_{opt}=(0,8,–3,7,–8,–4) и Y_{opt}=(0,9,–7,1,6,–9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайн С. Опционы: Полный курс. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2008. – 466 с.
2. Буренин А.Н. Фьючерсные, Форвардные и Опционные рынки: Учебное пособие 2-е издание - М.: Научно-техническое общество имени академика С.И. Вавилова, 2002.
3. Фельдман А.Б. Производные финансовые и товарные инструменты: Учебник. – Финансы и статистика, 2005. – 304 с.
4. Курочкин С.В, Пичугин И.С. Структурированный коллар: построение сложных опционных продуктов // Рынок Ценных Бумаг. 2005. № 14 (293). С. 64-68.
5. Курочкин С.В. Функции выплат, реализуемые с помощью опционных стратегий // Экономика и математические методы. 2005. – Т. 41. – № 3.